

詩數列車—數學詩教學設計分享

蘇俊鴻

臺北市立第一女子高級中學數學教師

前言

筆者應邀分別在國文學科中心和數學學科中心分享這兩年嘗試發展的數學詩課程，意外地這個課程模組引起不小的迴響。因此，將講稿內容重新整理撰寫，希望能與更多的老師分享，在面臨 107 課綱即將上路的時刻，或能提供發展選修課程的參考。

近年來，數學普及的書寫策略，使得「數學敘事」成為數學教師用以增進學生多元理解的可行教學活動，簡言之，透過敘事的方式，讓學生能在脈絡中體驗相關的數學活動，進而增進對數學概念的理解。¹事實上，數學詩的創作正是一種數學敘事的實作活動，透過創作的歷程，數學概念的運用，必能豐富學生對數學的多元理解。

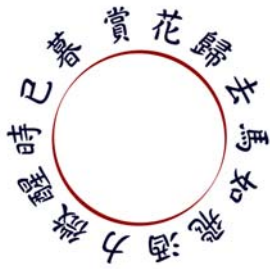
本文預計分成四個部份：首先，簡略說明數學詩的意涵，方能引領讀者理解整個數學詩課程設計的核心。然而，談到筆者對於數學詩教學的想像，就不能不提及對多數人來說都非常陌生的詩人曹開(1929-1997)，透過他的生平簡介，希望能讓讀者理解數學詩如何成為他顛沛人生中重新定位的重要因素。接下來，則是介紹這套每週 2 節，共三週 6 節課的數學詩課程模組的設計概念，以及裏面的重要課程內容。最後，則是筆者實際課堂實施後的心得分享與教學建議。接下來，讓我們就從數學詩開始談起。

什麼是數學詩

十九世紀俄國著名女數學家柯瓦列夫斯卡婭(1850-1891)曾說過：「不能在心靈上作為一個詩人，就不能成為一位數學家。」說明了數學與詩的某種共通性：數學家利用公理系統，輔以符號，簡潔地描述數學真理；詩人運用精鍊的文字，創造出豐富意象，抒懷表達人間事。

然而，「數學詩」並非簡單的「數學+詩」，數學和詩如何相融呢？稍加爬梳，便發現前人有著不少嘗試。比如蘇東坡的好友秦少游所寫的重句詩，十四個字排成圓形，呈現出美感和詩趣：

¹ 所謂「數學敘事」係指一種用以溝通或建構數學意義的敘事(narrative)，亦即透過比喻的引進，數學與敘事的結合，得以引發或促進學習者的數學理解。參見洪萬生(2016)。



賞花歸去馬如飛
 去馬如飛酒力微
 酒力微醒時已暮
 醒時已暮賞花歸

或者是，宋代理學家邵雍(1011-1077)巧妙將數字一到十入詩，寫成一首通俗自然、適合兒童習算的蒙學詩《山村咏懷》：

一去二三里，煙村四五家，
 亭台六七座，八九十枝花。

更甚者，直接將數學問題以詩文呈現，下面這首詩取自明代數學家程大位原著，清代數學家梅珏成(1681-1763)刪輯的《增刪算法統宗》(1760)：

三藏西天去取經，一去十萬八千里。
 每日常行七十五，問公幾日得回程。

由上可見，何謂「數學詩」，自在人心，並無定論。到了現代，新詩更是讓數學與詩的融合表現更加多元自在。例如，詩人詹冰(1921-2004)的圖像詩《三角形》：²

【三角形】

詹冰

三邊角邊角邊循環不息
 再有彈性變化無窮
 富於積極性發展性
 充滿朝氣和活力
 角角相呼相應
 但邊邊相關
 三邊三角
 那只是角形
 三
 數學美的精華
 哲學的完美像
 宇宙精神的
 神聖象徵
 哦妳的
 三角
 形

詩人由抽象的數學的三角形，到具體的光學三稜鏡、金字塔建築，最後歸結到完美的女體，涵蓋了數學、美學、哲學和宇宙，十足展現其聯想的功力。

不過，筆者更為喜歡的是張靜年在 2015 年北一女中舉辦數學詩徵選時所寫

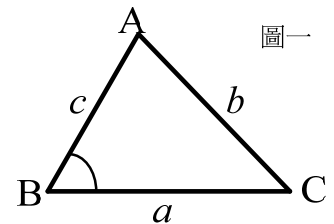
² 詹冰，本名詹益川，台灣苗栗人，曾任藥師和中學理化老師。早期創作以日文為主，戰後才開始中文寫作，為「笠詩社」的發起人之一。

的作品《如果，可是》：³

可是不能把人心用 Σ 相加
就團結一心
可是不能把壞人關進絕對值裡
出來後能保正
可是不能把所有的汙染乘以零
地球就變乾淨
可是不能把愛屋及烏用數學歸納法推廣
讓全世界相親相愛
可是不能把 1%的財富和 99%的貧窮相加除以二
貧富不均就消失
可是不能把你的長處我的短處他的稜角帶入餘弦公式
就求出你我他之間該維持的長度

該有多好
如果數學在現實中成立

要是數學能在現實中派上用場，也許她所看到人間許多不公不義之事，就能被一一解決。(老師也就不需要苦口婆心勸學生學習數學了!)更可貴的是，她讓許多原本冰冷的數學概念在這首詩中呈現出動人的溫度。比如說，詩中提及的餘弦公式，此一公式係指在一三角形中，若我們知道其中兩邊邊長和所夾的一角，便能求出第三邊的長度。如圖一所示，已知 a 、 c 和 $\angle B$ ，則可求出 b ，因為 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$ 。然而，現實生活中，我們卻無法將你的長處、我的短處和他的稜角直接量化帶入餘弦公式，就能知道你我他之間該維持的距離。作者點出了人際關係難以掌握的困境，也讓我們看見餘弦公式這麼有「人味」的詮釋和使用。當然，我也認為相比代入公式解題，靜年對於餘弦公式的理解是無庸置疑的。



正是這樣的啟發，促使我對數學詩下了這樣的定義：

數學詩是指創作者能運用數學概念及其延伸變形，成為意象創造和情景互動的重要元素。同時，也能促進讀者對於數學概念的深刻理解。⁴

也因此，發展這個數學詩課程模組時，就是基於上述的看法，和志同道合的國文老師一起進行課程的教學設計，開始國文與數學跨領域的合作。並且，在資料的收集過程中，詩人曹開的數學詩作品，讓我對數學可以如何與一個人的人

³ 張靜年當時是我的高三學生，目前就讀國立成大護理系二年級。

⁴ 需要申明的是，這個定義純屬個人，尚祈各位多多指教。

生互動有了更深的體認，進而也將曹開及其作品變成數學詩課程的一部份。作為一名詩人，曹開的名聲並不響亮，他出道非常的晚，一直到 59 歲參加「第九屆鹽分地帶文藝營」的文學獎，得到新詩創作第一名，才在詩壇得到注意。就讓我們一起了解數學詩人曹開的生平及其作品。

數學詩人曹開⁵

1929 年，曹開誕生於台中州員林郡(現今彰化縣員林)的普通家庭，家中經濟狀況並不寬裕。但曹開自身好學，一路從員林公學校，公學校高等科，到豐原商業專修學校畢業。接著，出於工作謀生的考量，他報考並考取台中師範學校公費生。看似順遂的人生，沒料到，二年後卻迎來最大的風暴，從此身陷其中。1949 年，剛就讀三年級的曹開被控涉入共黨叛亂活動銀鐺入獄，1951 年轉到綠島服刑，直到 1959 年底刑期屆滿出獄，人生的黃金十年就在監牢中度過。然而，出獄後仍持續受到情治單位的監管騷擾，使得曹開心情難以安穩，一直過著低調且四處搬遷，屢屢更換工作的生活，直到利用獄中學來的醫學知識，在南部鄉下從事醫療行為，經濟狀況才逐漸好轉。後來，他一度移民到阿根廷，卻因風土民情的無法適應，又回到臺灣。最後，1997 年病逝高雄，享年 69 歲。

除了醫學知識外，曹開在獄中還自學數學，以及新詩創作。出獄後，持續不輟的新詩創作成為他苦悶精神上的重要依託，他的創作內容多元，大致可分為數學詩、獄中詩、科幻詩、醫事詩和抒情詩等。其中，最被推崇的是數學詩，曹開一生共創作約 1500 首新詩，數學詩佔有 278 首，開創了數學詩這個類型，因此常被稱為「數學詩人」。⁶

令人動容的是，曹開的數學詩創作真切地與他的人生際遇連結，「並非僅將一連串的數學符號組合而已，而是將人生當成數目，在內化、因式分解之後，再以文字表達出來。」例如，這首《小數點的詩感》：

我一再的認證
我是人間方程式裡
最卑微的小數點
原無意投生在紛雜的函數中

你不必介意
更無需憐憫

⁵ 關於曹開的生平，主要參考王宗仁(2007)。

⁶ 曹開鍾情數學詩的創作，有其特殊考量。他認為將大家陌生的數學語彙入詩，在獄中比較不會被羅織罪名，招致殺身之禍。

你堅持你的算法
我維護我的向量

用四捨五入的定律
把我歸納留存也不錯
將我犧牲拋棄也無不對
在這加減乘除的公式中

清算競爭激烈的世界裡
我願承受無情的因式分解
按公理消去
彼此的恩怨

人人像數字
終結都得奔向無窮的零域
我將達觀的迎接
—— 那盡頭的自由理想環！

曹開自稱「小數點」，如詩中所言，他認為自己是人間方程式中最卑微的小數點，並無意投身在紛雜的函數中。不過，既然碰上了，渺小的詩人仍能堅持真理，毫無畏懼加諸其身的各式「加減乘除」，將自己歸納留存或犧牲拋棄都可以。因為，無論如何的清算，他總能堅持自我的方向。更難能可貴的是，詩人還願意「按公理消去彼此的恩怨」，懷抱希望迎向盡頭的自由理想世界！展現出對於自身遭遇的豁達和對敵人的寬容。不難讓人看見：透過數學，讓曹開得以身心安頓，堅守理念，維護著那微小的自我尊嚴地存在。

同時，詩人也透過數學訴說他的政治觀察，下面這首《獨裁的數學公式》絕對是其中的代表作，一起來看看：

人間繁分式裡
他構造一條倒函數
成為： $\frac{1}{P-1}$
P=People 代表人民
在專制的公式裡
盤鎮於最高層的寶座上
傲視下界威風凜凜
獨一無二就是至尊的象徵

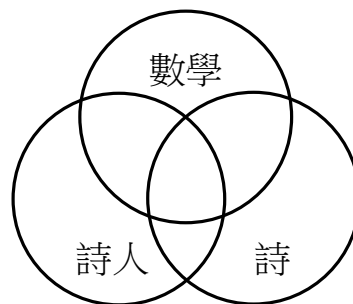
而當 P 值趨向無窮大
他的價碼趨近零
要是 P 值趨向極小
他乃形成負面的數目

仔細想想：詩人所寫出這條代表獨裁者的數學公式 $\frac{1}{P-1}$ 非常適切！既具象的表達出「萬人之上」的睥睨神情；卻又諷刺地點出寡頭獨裁的荒謬本質，想要享受權力，就要管理越多的人民，但人民愈多，擁有民主意識的人就愈強，獨裁的地位就益發難保。反之，管理的人民太少，那獨裁有何意義呢？其中的意義和這公式的數學意義完全貼合，是一首很值得數學老師在課堂分享的數學詩。

礙於篇幅的緣故，無法再列舉更多詩例，有興趣的讀者，強烈建議參閱曹開的詩集，更能感受曹開如何將人生感觸的層面與數學巧妙的結合，創作出一首首讓人回味再三的數學詩作。接下來，就來介紹我們所發展的數學詩課程模組。

數學詩模組課程內容

整個數學詩課程發展，大約歷經 2 年左右的時間，從找尋志同道合的國文老師協助指導，凝聚數學詩的共識，蒐集相關資料，到教學活動的設計，進行試教調整，最後的目標則是設計出數學老師也能進行教學的課程。數學詩課程由三個模組構成，每個模組都有 Part A 與 Part B 兩個流程，以每週 2 小時，共三週 6 小時教學活動設計。承上所述，課程以「數學」、「詩」及「詩人」為思考設計的面向，設計相關的文本討論及實作內容。



其中，「數學」面向旨在提供數學材料，引導學生認識、熟悉、討論及運用數學原理；「詩」面向旨在提供數學詩的古典及現代面貌，指引學生從詩創作的觀點探索數學概念的可能性和延伸；「詩人」面向則由文本出發，旨在提供人與數學、人與詩創作的關係，提升學生對數學的學習興趣與創意發想。

課程模組一設計次序為「數學→詩→詩人」，重點在於引導學生如何結合數學與文字，從中展現創意。在 Part A「數學→詩」的單元裡，先以數學猜謎活動暖身，引導學生思考數學數字與文字結合的趣味，其次介紹對聯，以數學運算為材料的對聯，其中的數學趣味及文字嫁接該如何產生，引導學生從中思索數學名詞、四則運算及語文如何相接，進而掌握創作技巧。在 Part B「詩→詩人」的單元中，先以數學理趣開展問題，數學名詞或公式展現了什麼「理趣」？這樣的理趣若要透過文字加以傳達，在新詩創作中可以從何著手？希望引動學生思考這些問題。接著，透過「一行詩」的創作練習，讓學生以數學名詞為材料著手創作，從中觀察新詩創作的重要元素。

課程模組二設計次序為「詩人→數學→詩」。重點在引導學生如何閱讀數學詩，從中領略理趣，並且引導學生探討以數學為材料的詩創作能否發揮詩「言志(人的心志意向)」的傳統。在 Part A「詩人→數學」單元裡，以臺灣詩人曹開的詩作和生平介紹發端，引導學生思考：數學於一個行動受限的人，可以提供怎樣的想像空間及思考解放？藉著一個又一個的數學名詞，曹開如何自我提升，以療癒自己於生活中跌撞而生的千瘡百孔？數學思維如何對身陷囹圄的詩人是一種救贖自我的方法？而對於身陷升學壓力中的高中生而言，數學思維又可以發揮怎樣的機能？閱讀現代詩可以憑感覺，也可以輔以方法，在 Part B「數學→詩」這個單元裡，以鄭愁予的經典詩作《錯誤》為例，透過讀詩、賞詩方法的介紹，為學生提供賞析詩的面向，引導學生理解詩元素的重要，並觀察詩中所言何志。從而為模組三賞析數學詩準備。

課程模組三的設計次序為「詩→詩人→數學」，重點在引導學生如何結合數學與文字，從中展現創意。在 Part A「詩→詩人」的單元中，鼓勵學生以詩意的心靈感受生活，以詩意的敏銳結合數學。新詩是許多人無法進入理解的文學體裁，因此易讓學生產生隔閡，甚至拒之於千里之外，其實生活中處處是詩，只看我們如何捕捉、篩選及加以組織。這個單元中擇取高中生寫作的數學詩進行觀摩，在詩義及寫作手法上都較貼近於課堂中的學生，期能有效激勵學生發想及創作。在 Part B「詩人→數學」這個單元裡，主要在引導學生自行創作。鼓勵學生從「意象」的角度著手創作數學詩，藉由個人創作的二行詩、透過團體創作及修改的過程，讓學生在合作學習的狀況中完成一首數學詩，讓學生體驗數學與詩的結合及美妙。

至於課程教學實施的結果如何？容筆者說明如下。

心得分享與教學建議

承上所述，這個課程在高一的數學科特色課程實施過數次，一直還轉動修正的狀態，主要架構大致底定不變，但小細節總在試教後小修小改。學生剛脫離國中階段，對於新詩創作的接觸不多，對於數學詩更是未曾聽聞。但在經過

三週的課程後，多數學生在事後的課程回饋中都表示對數學詩留下深刻的印象。就像某位同學寫道：

我覺得數學詩是一個很有趣的事物，是我從未接觸的領域。透過這門課了解到「啊！原來數學跟詩能這般巧妙地結合。」

至於筆者關於課程印象最深刻的部份，則是由國文老師進行教學，筆者在旁見習觀摩的首次課程。當國文老師進行模組三 Part A「詩→詩人」的單元，賞析學長姐的數學詩時，這些高一上的學生想要理解「數學歸納法」、「tan」、「極式」、「無窮等比級數」等等出現在詩中的數學名詞究竟是什麼意義？開始自發性地詢問筆者上述的數學概念，於是筆者只好在黑板上逐一介紹，使得整個課程因而中斷約 30 分鐘。事後，我和伙伴國文老師分享：在我二十多年的數學教學生涯中，那個時刻讓我第一次感受到學生發自內心主動地想要知道某些數學概念，這個經驗讓我非常感動，我想這是讓我持續想要在數學詩的課程上推動的重要原因吧！

當筆者實際進行數學詩課程教學後，我認為整個課程的安排對數學老師來說，沒有太多專業上的困難。事實上，學生在短短的三週課程後，大抵都能實作出數學詩，但通常都還非常的質樸，尚需琢磨再三。因此，沒有點評詩作的需要，只要多多鼓勵學生持續嘗試修改。換言之，經過數學詩的課程教學後，我們的目的，就是想在學生的心中埋下一顆數學詩的種子。

但是，也不能說這個課程全然沒有挑戰之處，就筆者的經驗來看，我認為整個課程對數學老師最困難的地方，應當是課程模組二以鄭愁予詩作《錯誤》進行現代詩的賞析介紹，此處課程真的是國文學科的專業領域，強烈建議此段課程務必多多準備。一個可行的方法，也是筆者所採取的策略：不妨找尋一位伙伴國文老師，以協同教學進行，幾次下來，透過在旁的觀摩學習，累積經驗值，厚植上場的準備。一回生二回熟，相信這個數學詩的課程就能得心應手。

結語

在本文中，筆者試圖說明數學詩創作將之課程化的可行性；國文科與數學科跨領域教學相互激盪的可能性。事實上，引發筆者關注數學詩的契機，是來自友校成功高中數學科舉辦多年的數學詩創作比賽。在引進北一女舉辦校內高三學生數學詩創作比賽，獲得不錯的學生作品。同時，也看到學生透過這樣的實作，展現出她們對於數學概念的理解—那些無法經由紙筆測驗得出的面向。因此，才會進一步嘗試將之課程化，落實成為數學科特色課程教學的部份內容。

上述的三個模組課程，正是想要落實數學詩課程的實作，逐步帶領學生由一行詩、二行詩到團體組成一首詩，經驗數學詩創作的歷程。相信透過前面關

於課程內容、活動設計的解說，應能讓讀者的你有嘗試的衝動吧！或許你會認為這套課程看來更適合國文老師的教學，初看課程結構可能會如此判斷，不但，當深入到數學概念的詮釋和引導時，你將驚訝發現數學老師其實更加適合帶領這個課程。

近年來，數學普及讀物和數學小說的風行，使得透過數學閱讀和敘事練習來增進學生多元理解的教學活動變得愈加可行。事實上，閱讀和敘事的實作還能訓練學生分享與溝通的能力，作為敘事實作的數學詩創作正是將數學概念落實在溝通時意象表達的可能方式，還記得餘弦公式如何巧妙將你我他之間的關係串連起來，以及詩人曹開那些用人生經歷化成一首首數學詩。

參考文獻

1. 王宗仁(2007)，〈數字與人生的結合—曹開數學詩研究〉，《明道通識論叢》第三期。
2. 洪萬生(2016)，〈數學敘事與普及閱讀〉，《高中數學學科中心電子報》第116期。
3. 曹開著，呂興忠編(2005)，《小數點之歌》，台北：書林出版社。

誌謝

這個數學詩的模組課程發展，受到北一女中國文教師暨國文學科中心執行秘書陳麗明老師的大力協助，特此誌謝。