連 分 數

徐健策 老師

我們都知道一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根的公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ，
如果我們不使用上面的求根公式，而考慮如下的作法：

$$x^2-3x-1=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=3x-1 \ ，$$

由於 $x=0$ 顯然不是根，所以考慮 $x\neq 0$，兩邊同時除以 $x \Rightarrow \quad x=3+\dfrac{1}{x}$ 。

既然 x 等於 $3+\dfrac{1}{x}$，將上式等號右邊的 x 以 $3+\dfrac{1}{x}$ 取代，得到 $x=3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}$

上式右邊的 x 還是可以繼續用 $3+\dfrac{1}{x}$ 取代；

經過多次取代後將得到 $x=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}}}$

當然，這樣的動作可以無窮盡地進行下去。這樣做對求出原方程式的根有任何幫助嗎？
由於每一次取代都會讓右邊的分數往下多出一層，如果我們將各階段還未被取代的 $\dfrac{1}{x}$ 忽略，將得到一連串的分數：

$$3\ ，3+\frac{1}{3}\ ，3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}\ ，3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}\ ，\ \ldots$$

它們的值分別為：3，$\dfrac{10}{3}=3.33\ldots$ ，$\dfrac{33}{10}=3.3$ ，$\dfrac{109}{33}=3.303030\ldots$ ，$\dfrac{360}{109}=3.30275\ldots$

由求根公式我們知道 x 的一個可能的值為 $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}=3.30277\ldots$ ，
看起來，隨著取代次數的增加，這一串的分數形式的值，「似乎」越來越接近實際值。這些分數的形式是什麼呢？

輾轉相除法 (歐幾里德算法)

先複習一下「除法原理」：若 a, b 為正整數，則存在唯一的一組整數 q, r，使得 $a=bq+r$，其中 $0\le r<b$，稱 a 除以 b 的商為 q，餘數為 r。

設 a, b 為兩正整數，且 $b<a$，則

$$\text{(甲)}\ \begin{cases} a=b\,a_0+r_1 & 0<r_1<b \quad (a_0\text{ 為商數}, r_1\text{ 為餘數}) \\ b=r_1\,a_1+r_2 & 0<r_2<r_1 \\ r_1=r_2\,a_2+r_3 & \cdots \\ \quad\cdots\cdots\cdots & \\ r_{N-2}=r_{N-1}\,a_{N-1}+r_N & \\ r_{N-1}=r_N\,a_N & (r_N\text{ 整除 } r_{N-1}) \end{cases}$$

這個計算法是在紀元前三世紀時由歐幾里德發現的，記載在他不朽的《原本》裡第七卷上。它的主要目的在於求兩數 a 與 b 的最大公因數（即上式中之 r_N）。如果使用電子計算機來設計解決最大公因數的問題的話，這個兩千年前用的方法仍然是目前最棒的。

現在，我們把上式裡的式子全寫為分式：

$$\begin{cases} a = b\,a_0 + r_1 \\ b = r_1\,a_1 + r_2 \\ r_1 = r_2\,a_2 + r_3 \\ \qquad \cdots\cdots \\ r_{N-2} = r_{N-1}\,a_{N-1} + r_N \\ r_{N-1} = r_N\,a_N \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{a}{b} = a_0 + \dfrac{r_1}{b} \\ \dfrac{b}{r_1} = a_1 + \dfrac{r_2}{r_1} \\ \dfrac{r_1}{r_2} = a_2 + \dfrac{r_3}{r_2} \\ \qquad \cdots \\ \dfrac{r_{N-2}}{r_{N-1}} = a_{N-1} + \dfrac{r_N}{r_{N-1}} \\ \dfrac{r_{N-1}}{r_N} = a_N \end{cases}$$

再將右式中第一式的 $\dfrac{r_1}{b}$ 以第二式之倒數代入，接著 $\dfrac{r_2}{r_1}$ 以第三式之倒數代入，依次類推，即得 $\dfrac{a}{b} = a_0 + \dfrac{r_1}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_N}}}}$

(其中 a_0 為整數，$a_1, a_2, \ldots, a_N$ 為正整數)

上式之右邊即所謂的「連分數」（更精確地說，**有限簡單**連分數）。

連方數的定義

形如 $a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots}}}$，的分數稱為「連分數」，其中 $a_0, a_1, a_2, \ldots.$ 和 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ 是實數或複數；為有限或無限多項。

如果一個連分數中的 $b_1, b_2, b_3, \ldots$ 都是 1，而且除了 a_0 以外的其它 $a_1, a_2, a_3, \ldots.$都是正整數(a_0 可為任意整數)，且只有有限項時，我們將這種連分數稱為「簡單的連分數」，他們具有如下的形式： $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$，$a_0, a_1, a_2, \ldots.$ 為正整數或零。 例如：$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$。

連方數有一個方便多的記法是：$a_0 + \dfrac{1}{a_1 +}\,\dfrac{1}{a_2 +}\,\cdots\,\dfrac{1}{+\,a_N}$，上式中第一個 + 號之後的 + 號都寫低了，這是為了使我們記起在構成一個連分數的過程中“降了一層”。

用符號表示 $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ 也是方便的，項 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ 叫做連分數的**部分商**。

例子：

(1) 分數 $\rightarrow$ 連分數

$$\frac{67}{19}=3+\frac{10}{19}=3+\frac{1}{\frac{19}{10}}=3+\frac{1}{1+\frac{9}{10}}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{10}{9}}}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{9}}}=[3, 1, 1, 9]。$$

(2) 連分數$\rightarrow$分數

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}=1+\frac{1}{2+\frac{4}{13}}=1+\frac{13}{30}=\frac{43}{30}=[1, 2, 3, 4]。$$

討論：

(一) 如上例(1)，[3, 1, 1, 9] 是否是將 $\frac{67}{19}$ 表為簡單連分數的唯一方式呢？由化簡過程看來應該是如此，不過由於 $9=8+\frac{1}{1}$，因此 [3, 1, 1, 9] 其實又等於 [3, 1, 1, 8, 1]。事實上，任何一個有理數表示成簡單連分數的方式都有且僅有兩種，這兩種方式只在最後一個階段有差別，其中一種方式的最後一個數為1，而另一種方式則不是1，因為
當 a_N 不等於1，$[a_0, a_1,\dots, a_{N-1}, a_N]$ 一定會等於 $[a_0, a_1,\dots, a_{N-1}, a_N-1, 1]$；
而如果 a_N 等於1，那麼 $[a_0, a_1,\dots, a_{N-1}, 1]$ 一定等於 $[a_0, a_1,\dots, a_{N-1}+1]$ 。

(二) 每一個有限簡單連分數都可以化為一個有理數，反之亦然。

漸近分數

考慮一個有限連分數的幾個基本關係式。設 $a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{+a_N}$ 為任意一個有限連分數，由計算易得： $[a_0]=a_0=\frac{a_0}{1}=\frac{p_0}{q_0}=t_0$ ， $[a_0,a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_0}=\frac{p_1}{q_1}=t_1$ ，

$$[a_0,a_1,a_2]=a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2}=\frac{a_2a_1a_0+a_2+a_0}{a_1a_2+1}=\frac{a_2(a_1a_0+1)+a_0}{a_1a_2+1}=\frac{p_2}{q_2}=t_2\text{ ，……}$$

一般地 $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]=a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{+a_k}=\frac{p_k}{q_k}=t_k$

其中 t_k 稱為此連分數的第 k 個漸近分數，p_k, q_k 為互質的兩整數，稱為此漸近分數的分子與分母。

連分數的幾個基本關係式

<定理一>
$$\begin{cases} p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2} & k\ge 2\\ q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2} & k\ge 2\\ p_0=a_0\text{ , }p_1=a_0a_1+1 & \\ q_0=1, q_1=a_1 & \end{cases}$$

[證明] 利用數學歸納法，當 n=2 時顯然成立；設 n=k 時成立，當 n=k+1 時

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=[a_0,a_1,a_2,a_3,------,a_{k+1}]=[a_0,a_1,a_2,a_3,------,a_k+\frac{1}{a_{k+1}}]$$

$$=\frac{(a_k+\frac{1}{a_{k+1}})p_{k-1}+p_{k-2}}{(a_k+\frac{1}{a_{k+1}})q_{k-1}+q_{k-2}}=\frac{a_k\cdot p_{k-1}+p_{k-2}+\frac{1}{a_{k+1}}\cdot p_{k-1}}{a_k\cdot q_{k-1}+q_{k-2}+\frac{1}{a_{k+1}}\cdot q_{k-1}}=\frac{p_k+\frac{1}{a_{k+1}}\cdot p_{k-1}}{q_k+\frac{1}{a_{k+1}}\cdot q_{k-1}}$$

$$=\frac{a_{k+1}\cdot p_k+p_{k-1}}{a_{k+1}\cdot q_k+q_{k-1}}$$ 可以證得此性質。

例如：求 $3+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5}=[3,2,3,4,5]$ 的漸近分數。

[作法] 先把 $a_0=3$，$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=4$，$a_4=5$；$p_0=3$，$p_1=7$，$q_0=1$，$q_1=2$，列入右表：

k	0	1	2	3	4
a_k	3	2	3	4	5
p_k	3	7	24	103	539
q_k	1	2	7	30	157

所以，我們可以得到 [3, 2, 3, 4, 5] 的漸近分數依次為：

$\frac{3}{1},\frac{7}{2},\frac{24}{7},\frac{103}{30},\frac{539}{157}$ 。

同樣利用 數學歸納法，我們還能夠得到下列的性質：

<定理二>： $\begin{cases} p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}, & n\geq 1\cdots\cdots\cdots(1) \\ p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(-1)^n a_n, & n\geq 2\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

<定理三> 若 r 表示任意實數，$\frac{p_n}{q_n}$ 為 r 的第 n 個漸進分數，則 $\left|r-\frac{p_n}{q_n}\right|\leq\frac{1}{q_nq_{n+1}}$ 。

上述兩個定理的詳細證明，都能參閱文末的參考資料，這裡就不再列出。

此外，由以上幾個定理，我們可以推論出幾個有限簡單連分數的基本性質：

性質 1：當 $k>1$ 時，$q_k\geq q_{k-1}+1$，所以 $q_k\geq k$。

性質 2： $\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}>\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$, ， $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}>\frac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}}$

性質 3： 對所有的 $1\leq n\leq N$，p_n 與 q_n 互質。

由以上的性質，我們知道漸近分數的分母一直增大，而兩相鄰漸近分數之差則愈來愈小。另外，偶數項部分形成單調嚴格上昇數列而奇數項部分形成單調嚴格下降數列，也就是數列 $\{t_k\}$的偶數項為遞增數列，奇數項為遞減數列。即 $t_0<t_2<t_4<\ldots<t_n<\ldots<t_5<t_3<t_1$。

我們來看看 16 世紀的時候，義大利數學家 Bombelli 利用連分數求$\sqrt{2}$的近似值做法：

令 $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{y} \Rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，今以 $x=\sqrt{2}-1$ 代入，則

$$x=\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{2+x}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}=\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots,$$

所以 $\sqrt{2}-1$ 的頭幾個漸近分數為 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{12}{29}, \dfrac{29}{70}, \dfrac{70}{169}, \dfrac{169}{408}, \dfrac{408}{985}, \ldots$

即 $\sqrt{2}$ 的頭幾個漸近分數為 $1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{17}{12}, \dfrac{41}{29}, \dfrac{99}{70}, \dfrac{239}{169}, \dfrac{577}{408}, \dfrac{1393}{985}, \ldots$

而 $\left|\sqrt{2}-\dfrac{577}{408}\right| \le \dfrac{1}{408\times 985} < \dfrac{1}{4\times 10^5}$，

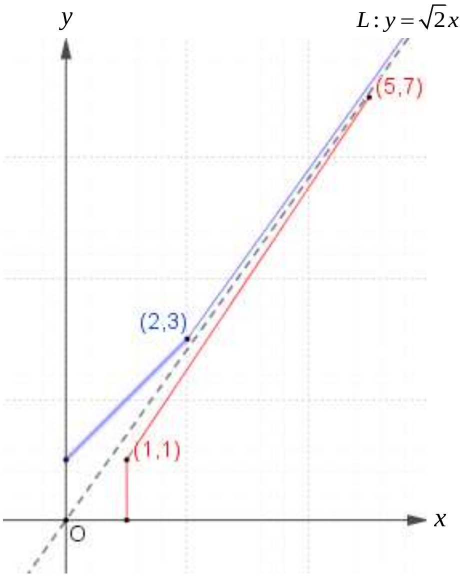
這就說明了以 $\dfrac{577}{408}$ 做為 $\sqrt{2}$ 的近似值時，誤差小於四萬分之一。

幾何觀點

德國數學家 *Felix Klein*（1849−1925）於西元1895 年提出了以下關於無理數所對應的無窮連分數在幾何上奇妙的解釋。

假設坐標平面的每個格子點 (即x坐標與y坐標皆為整數的點)上都釘著一根大頭針。對任意正無理數 α，我們作直線 $y=\alpha x$；這條直線一定不會通過任何格子點(因為 $\alpha=\dfrac{y}{x}$ 為無理數)。

想像我們在第一象限內沿著直線 $y=\alpha x$ 拉一條細長的繩子，繩子的一端釘於原點上，另一端則被固定在直線 $y=\alpha x$ 上與原點距離無窮遠的某個點上;如果我們此時抓著繩子位於原點的這一端往旁邊拉開並注意隨時將繩子繃緊，繩子將會被位於某些格子點上的大頭針卡住；同理，如果我們將繩子往另一個方向拉開，繩子也將被另外一些大頭針卡住；有趣的地方是：這些在第一象限中將繩子卡住的每根大頭針的位置都對應到的一個漸近分數，其中位於直線下方的針的坐標為 (q_0, p_0)，(q_2, p_2)，(q_4, p_4)，… ，而位於直線上方的則是 (q_1, p_1)，(q_3, p_3)，(q_5, p_5)，…。



右圖所示為 $\alpha=\sqrt{2}$ 的情形；由 $\sqrt{2}$ 所對應的漸近分數為 $\dfrac{1}{1}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{17}{12}, \dfrac{41}{29}, \dfrac{99}{70}, \ldots$。

右圖中位於直線 L： $y=\sqrt{2}x$(黑虛線)下方的繩子會被坐標為(1, 1)，(5, 7)，(41, 29), …的針卡住，而直線上方的繩子則會被坐標為 (2, 3)，(12, 17)，(99, 70), …的針卡住。

除了漸近分數外，與連分數有關的許多性質也都在幾何上有對應的解釋，例如如果我們以P_n代表坐標為 (q_n, p_n) 的點，那麼我們前面用來定義 p_i 與 q_i 的遞迴關係相當於說明了由 P_{n-2} 到 P_n 的向量一定是由原點 O 至 P_{n-1} 的向量的整數倍，而由<定理二> 則說

明了 $\Delta OP_{n-1}P_n$的面積必為 $\frac{1}{2}$。

連分數的應用

(一) 一次不定方程式 $ax+by=c$ 的解

印度 *Aryabhata* 根據上述之連分數法則，於紀元 476 年成功地解決了一次不定方程式，這是史上最早使用連分數的記載。*Aryabhata* 的方法是這樣的：

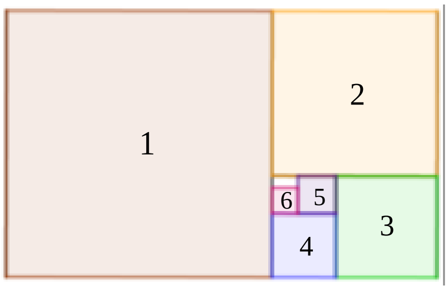
我們可假設正整數 a 與 b 互質，且 $a > b$，將分數 $\frac{a}{b}$展成連分數 $[a_0, a_1, a_2, \dots , a_N]$。令 $\frac{p_{N-1}}{q_{N-1}}$ 與 $\frac{p_N}{q_N}$ 為最後兩個漸近值，則其中 $\frac{p_N}{q_N} = \frac{a}{b}$ 因兩者皆為最簡分數，故 $p_N = a$，$q_N = b$，再由定理二，$p_N q_{N-1} - p_{N-1} q_N = \pm 1$，即 $aq_{N-1} - bp_{N-1} = \pm 1$，（為方便計，可取正號），代入方程式 $ax + by = c = c\,(aq_{N-1} - bp_{N-1})$ ，並展開、移項、化簡，得 $\frac{c\,q_{N-1} - x}{b} = \frac{y + c\,p_{N-1}}{a} = t$ ，

因而解得 $\begin{cases} x = c\,q_{N-1} - bt \\ y = at - cp_{N-1} \end{cases}$ $t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 。

(二) 黃金分割：

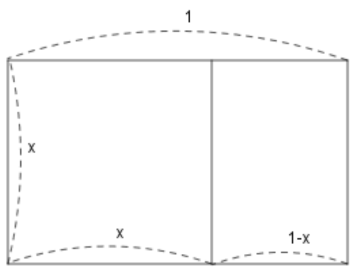
古希臘之神殿 *Parthenon* 結構之美，嘆為觀止，常謂之「黃金比」或「黃金分割」，其確實意義如下：

假定有一個長方形，截掉一正方形後，所剩之小長方形與原長方形相似（見右圖），則從此小長方形依樣再截掉一小正方形，所剩之圖形仍與原長方形相似，這種程序可無窮盡地做下去，這就叫做「黃金分割」，而具備此種特性之長方形之長寬比稱為「黃金比」。
那黃金分割又怎麼和連分數扯上關係呢？



讓我們先看一下黃金比的計算：

設右圖長方形之長邊為單位長 1，而短邊長為 x，則根據假設



$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} \;\Rightarrow\; x^2 = 1 - x \;\Rightarrow\; x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \;\;\text{(負不合)}$$

另一方面， $x^2 + x = 1 \;\Rightarrow x\,(x+1) = 1$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow x = \frac{1}{1+(\frac{1}{1+x})}, \quad \text{所以} \quad x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}} = [0, 1, 1, 1, 1, \dots]$$

如右表所示：

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_k	0	1	1	1	1	1	1	1
p_k	0	1	1	2	3	5	8	13
q_k	1	1	2	3	5	8	13	21

其漸進分數為

$$1\ ,\ \frac{1}{2}=0.5\ ,\ \frac{2}{3}=0.666...\ ,\ \frac{3}{5}=0.6\ ,\ \frac{5}{8}=0.625\ ,\ \frac{8}{13}=0.61538...\ ,\ \frac{13}{21}=0.61904...,\ldots$$

可以看到，利用連分數來求此種二次方程式的無理數是一個非常有感覺的方法。

(三) 圓周率：

圓周率的連分數表示為 [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, …]，代入公式 得

k	0	1	2	3	4
a_k	3	7	15	1	292
p_k	3	22	333	355	103993
q_k	1	7	106	113	33102

所以前幾個漸近分數為：$\frac{3}{1},\frac{22}{7},\frac{333}{106},\frac{355}{113},\frac{103993}{33102},\cdots$

中國在紀元五世紀時，祖沖之即以 22/7 為「疏率」(比 π 之實際值略大)，以 $\frac{333}{106}$ 為「密率」(比 π 之實際值略小)。

由 $\left|\pi-\frac{355}{113}\right|\le\left|\frac{103993}{33102}-\frac{355}{113}\right|\le\frac{1}{113\times 33102}<\frac{1}{10^5}$

可知以 $\frac{355}{113}$ 為 π 的近似值時準確到小數點後面 6 位。

事實上，祖沖之求出 $3.1415926<\pi<3.1415927$。這是非常了不起的成就。

(四) 閏年與週期的問題

4	43200 41852	10463 9436	7
1	1348 1027	1027 963	3
5	321 320	64	
	1		

我們知道地球繞太陽一周需 365 天 5 小時 48 分 46 秒，也就是需要 $365\frac{10463}{43200}$ 天，展開連分數得

$365\frac{10463}{43200}=365+\frac{1}{4}\,\frac{1}{+7}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+3}\,\frac{1}{+5}\,\frac{1}{+64}$ ，算法如右：

它的漸進分數是 $\frac{1}{4},\frac{7}{29},\frac{8}{33},\frac{31}{128},\frac{163}{673},\frac{10463}{43200},\cdots$ ，

這說明 4 年閏年 1 次增加 1 天是初步最好的逼近，但是 29 年必須閏年 7 次更精密；33 年閏年 8 次更精密；128 年閏年 31 次更精密。也就是說 99 年必須閏年 24 次增加 24 天，但若每 4 年閏年一次就會增加 25 天，故每逢 100 年時(如西元 1900 年、2100 年)，當年就不閏年。另

外因為每 128 年必須閏年 31 次(400=128×3+16) ，故 400 年應該閏年 31×3+4=97 次 ，另外若每 100 年增加 24 次閏年，則 400 年就會增加 96 次，故每逢西元 400 年(如西元 2000 年必須閏年增加 1 天)。

再如月亮繞地球一周所需要的時間為 29.5306 天，展開連分數得

$$0.5306=\frac{5306}{10000}=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{33+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$$

它的漸進分數是 $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{8}{15},\frac{9}{17},\frac{26}{49},\frac{867}{1634},\cdots$ ，

我們知道農曆大月有 30 天，小月 29 天，故 2 個月應該要有一個大月，一個小月；15 個月應該有 8 個大月 7 個小月，49 個月中有 26 個大月(前兩個 17 個月裡，均有 9 個小月，後面的 15 個月有 8 個小月)。

結語

(1) 大多數認為連分數的近代理論開始於 *R.* 蓬貝利(*Raiael Bombelli*)(生於 1530 年)，他是波倫亞人。他的關於代數方面的論文(1572) 包括一章平方根。例如，用現代符號來寫，他指出 $\sqrt{13}=3+\frac{4}{6+}\frac{4}{6+}\cdots$，

這說明在本質上他已經知道 $\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\cdots$

(2) 英國數學家 *Brouncker* 爵士(1620~1684)曾導出如下連分數：

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}=1+\frac{1}{2+}\frac{9}{2+}\frac{25}{2+}\frac{49}{2+}\cdots$$

十八世紀世界級的數學家尤拉 (*Euler*) 也曾導出

$$e-1=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\cdots$$

因而證得 e 為無理數，後來尤拉在柏林科學院的同事 *Lambert*（1728～1777）利用他們的結果證明了 π 是無理數。近代也有人利用連分數理論來研究超越數並獲得顯著成果的。

(3) 如果我們規定項數有限的連分數的最後一項不得為 1，那麼如同無理數一般，有理數與簡單連分數之間的對應也是一對一且映成的。既然每個實數都可以對應到唯一一個簡單連分數，我們是否能以連分數取代一般的數值表示方式呢？要將數值表為連分數並不難，困難是發生在要作加減乘除等運算時；到目前為止數學家還找不到較簡單的方法來處理連分數之間的算術運算。

參考資料

1. 許介彥，漫談最大公因數，科學教育月刊，第 251 期，2002。
2. 許介彥，淺談連分數，科學教育月刊，第 267 期，2004。
3. 林聰源，認識連分數，數學傳播第二卷第三期。

4. 余應龍，連分數及不定方程，中等數學，NO.2，2008。
5. 連分數，九章出版社。